Modèles de Tenseurs d'ordres multiples : Combinatoire, Renormalisation, ACP

Unité de recherche : Laboratoire d'Informatique de Paris Nord.
Direction : Joseph Ben Geloun (USPN, LIPN) : bengeloun@lipn.univ-paris13.fr.

1. Contexte scientifique général– Fort de résultats interdisciplinaires en physique [1], en combinatoire algébrique [2] et en Analyse en Composante Principale (ACP) [3], le sujet proposé approfondit la compréhension des modèles de tenseurs. Nous explorons de nouveaux modèles qui offriront davantage de flexibilité pour résoudre des problématiques qui persistent dans ces domaines.

2. Théorie des Champs de Tenseurs d'ordres multiples : Combinatoire, Renormalisation, ACP

Contexte – Les Modèles Tensoriels (MT) étendent les modèles de cartes aléatoires et engendrent des géométries discrètes aléatoires en toute dimension. L'objectif est de construire, à partir de ces espaces discrets, des géométries continues qui représentent un espace classique. Pour les matrices et les cartes, il est reconnu que l'on obtient une structure nommée sphère Brownienne. Cependant, la limite continue des MT conduit à des polymères branchés, une configuration arborescente aléatoire non souhaitée pour un espace continu en dimension D. C'est une première problématique que nous aspirons à résoudre.

Les bases de données réelles sont souvent représentées par des tableaux multidimensionnels ou des tenseurs. Être limité à l'utilisation d'un seul type de tableau peut constituer une contrainte importante selon les tâches et la compréhension des modèles, une contrainte que nous désirons surmonter afin d'explorer d'autres modèles combinatoires et algébriques susceptibles d'avoir des implications en informatique (traitement de données massives, apprentissage automatique). Ceci représente notre deuxième axe de recherche.

Objectifs – Nous envisageons de définir une nouvelle approche des MT avec des champs tensoriels à ordres multiples allant de $1 \leq d \leq D$. Nous concentrerons notre attention sur les objectifs suivants :

1. Énumération et complexité – Les interactions des MT sont définies par des contractions de tenseurs. Selon la nature du tenseur, complexe ou réel, on obtient respectivement des invariants de groupe unitaire ou orthogonal. Des recherches précédentes [4,5] ont porté sur l'énumération des invariants tensoriels unitaires et orthogonaux. Ces résultats constitueront une fondation pour établir des critères généraux pour la classification des contractions de tenseurs d'ordres variés. Dans un second temps, nous examinerons la complexité de nos algorithmes. Il s'agira de catégoriser nos énumérations et de déterminer si elles appartiennent à la classe #P, ou, via des réductions, si elles sont #P-complètes. Cela permettra de proposer de nouveaux exemples de ces classes, dont la compréhension demeure limitée.

2. Renormalisation – Après avoir précisément défini nos modèles, nous entreprendrons la renormalisation perturbative de modèles spécifiques, en nous inspirant de [1]. Cette démarche est essentielle pour saisir leurs propriétés physiques et analyser leur limite continue qui pourrait être différente des polymères.

3. ACP tensorielle – L'ACP a suscité un intérêt majeur ces dernières années, influençant significativement l'intelligence artificielle (IA) [6]. Les invariants tensoriels orthogonaux s'adaptent aux décompositions tensorielles connues [3] et les algorithmes les exploitant ont repoussé les frontières computationnelles de l'ACP modèle Spike, révélant des applications prometteuses en IA. Nous visons à élargir la gamme des invariants pour obtenir des avancées encore plus notables.

Dans cette optique, nous établirons une collaboration avec l'équipe du Pr. Vincent Rivasseau au CEA-LIST, Paris-Saclay. Ils ont, en effet, développé une expertise significative dans ce domaine, et nous bénéficierons de la compréhension de leurs méthodes.

[1] J. Ben Geloun, "Renormalizable Models in Rank $d \geq 2$ Tensorial Group Field Theory," Commun. Math. Phys. **332**, 117 (2014).

[2] J. Ben Geloun and S. Ramgoolam, "Quantum mechanics of bipartite ribbon graphs : Integrality, Lattices and Kronecker coefficients," Algebraic Combinatorics **6**, 547-594 (2023).

[3] M. Ouerfelli and M. Tamaazousti and V. Rivasseau, "Random Tensor Theory for Tensor Decomposition," in proceedings AAAI Conference on Artificial Intelligence, pages 7913-7921, 2022. `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:250298375`

[4] J. Ben Geloun and S. Ramgoolam, "Counting Tensor Model Observables and Branched Covers of the 2-Sphere," Ann. Inst. Henri Poincaré D, **1** 77-138 (2014).

[5] R. C. Avohou, J. Ben Geloun and R. Toriumi, "Counting $U(N)^{\otimes r} \otimes O(N)^{\otimes q}$ invariants and tensor model observables," [arXiv :2404.16404 [hep-th]].

[6] G. Ben Arous, R. Gheissari and A. Jagannath, "Algorithmic thresholds for tensor PCA," The Annals of Probability, **48** 2052–2087 (2020).